Lecție de pregătire

STRUCTURI ALGEBRICE (I)

23.03.2024

# Structuri algebrice (I) [Teste grilă 2024]

$(A, \circ)$ structură algebrică, adică $\exists F : A \times A \to A$

$x \circ y = F(x, y), \forall x, y \in A$

$\circ$ → „lege de compoziție" sau „operație binară"

## [1] Structuri algebrice ale mulțimilor cunoscute:

a) Grupuri (Monoizi)

$(G, \circ)$:
- G parte stabilă în raport cu „$\circ$"
- asociativitate
- element neutru: $\exists e \in G$ a.î. $x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in G$
- $\forall x \in G \; \exists x' \in G$ (simetricul lui $x$) a.î. $x \circ x' = x' \circ x = e$

Semigrup

Monoid

Grup

Notații: $e$ = elementul neutru $\longrightarrow e_G$

multiplicativ: $(G, \cdot)$ — elementul n: $e \overset{not}{=} 1 \in G$

simetricul = invers $\longrightarrow x^{-1}$

aditiv: $(G, +)$ — elementul n: $e \overset{not}{=} 0 \in G$

simetricul = opus $\longrightarrow -x$

„$\circ$" este comutativă $\iff \forall\, x, y \in G: x \circ y = y \circ x$

b) <u>Inele</u> $(I, +, \cdot)$

- $(I, +)$ grup comutativ $\left( x + y = y + x \quad \forall\, x, y \in I \right)$
- $(I, \cdot)$ monoid
- distributivitatea „$\cdot$" față de „$+$"

c) <u>Corpuri</u> $(K, +, \cdot)$

- $(K, +)$ grup comutativ $(e_K = 0)$
- $(K^*, \cdot)$ grup $\left( K^* = K \setminus \{0\} \right)$
- distributivitate —||— .

Exemple: a) $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{R}, +)$ grupuri comutative

$(\mathbb{R}^*, \cdot)$; $(\mathbb{C}^*, \cdot)$; $((0,\infty), \cdot)$ —— || ——

$$\boxed{\left((-1,1), \circ\right), \quad x \circ y = \frac{x+y}{1+xy} \longrightarrow \text{grup comutativ}}$$

!

Întrebări: 1) Este $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ grup?

2) Dar $([-1,1], \cdot)$ ?

b) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$; $(M_n(K),+,\cdot)$; $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$

$n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

c) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$; $(\mathbb{R},+,\cdot)$; $(\mathbb{C},+,\cdot)$; $(\mathbb{Z}_p,+,\cdot)$

$p$ – număr prim

„corpul claselor de resturi modulo $p$"

## $\boxed{2}$ Structură indusă pe o altă mulțime

("copiere de structură")

Fie $G, H$ două mulțimi a.î. există:

$f : G \to H$ o funcție bijectivă;

(deci $|G| = |H|$, cardinale egale).

Fie $(G, \circ)$ o structură algebrică dată (monoid sau grup);

Deoarece $f$ bijectivă $\Longrightarrow$ $\exists\, f^{-1} : H \to G$ inversa lui $f$

"este necesar să o aflăm".

Atunci $\exists!$ operație binară "$*$" pe $H$ a.î.

$(H, *)$ devine o structură algebrică izomorfă cu $(G, \circ)$

iar $f : G \to H$ este $\boxed{\text{izomorfism}}$

(bijectivă + morfism)

$f : (G, \circ) \to (H, *)$ morfism

$$\boxed{f(x \circ y) = \underbrace{f(x)}_{u} * \underbrace{f(y)}_{v}, \ \forall x, y \in G}$$

$$\boxed{u * v = f\left(f^{-1}(u) \circ f^{-1}(v)\right), \ \forall u, v \in H}$$

„copierea de structură de la G în H"

Inversă (dacă știm $(H, *)$):

$$\boxed{x \circ y = f^{-1}\left(f(x) * f(y)\right), \ \forall x, y \in G}$$

„copierea de structură de la H în G"

Proprietăți: Fie $f:(G,\circ)\to(H,*)$ morfism (de grupuri sau de monoizi)

- Dacă $(G,\circ)$ monoid, $V(G)=\{x\in G \mid x$ este simetrizabil$\}\Rightarrow (V(G),\circ)$ este grup;

- Dacă $f$ este morfism de monoizi $\Longrightarrow$

$$f(x_1\circ\ldots\circ x_n)=f(x_1)*\ldots*f(x_n);$$

În particular: $f(\underbrace{x\circ\ldots\circ x}_{n \text{ ori}})=\underbrace{f(x)*\ldots*f(x)}_{n \text{ ori}}$, $\forall\, x_1,\ldots,x_n, x\in G$.

• Dacă $f$ este izomorfism de monoizi $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{c} f(e_G) = e_H \\ f(U(G)) = U(H) \end{array}}$

• Dacă $f$ este morfism de grupuri $\Longrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{c} f(e_G) = e_H \\ f(\underbrace{x'}_{\text{în } G}) = \underbrace{(f(x))'}_{\text{în } H} \end{array}}$

Notație multiplicativă: $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$

Notație aditivă: $f(-x) = -f(x), \ \forall x \in G.$

## Exemple:

(1) Fie $(\mathbb{R},+)$ grup și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$
$a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}$

$f$ este bijectivă cu $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f^{-1}(u)=\dfrac{u-b}{a}$ (T. A.)

$\Longrightarrow$

$f$ induce pe $\mathbb{R}$ operația „$*$" dată de

$$u*v=f\left(f^{-1}(u)\circ f^{-1}(v)\right)=f\left(f^{-1}(u)+f^{-1}(v)\right)$$

$$=f\left(\frac{u-b}{a}+\frac{v-b}{a}\right)$$

$$=f\left(\frac{u+v-2b}{a}\right)$$

$$= \cancel{a} \cdot \frac{u+v-2b}{\cancel{a}} + b = u+v-b$$

Deci: $(\mathbb{R},+) \overset{f}{\cong} (\mathbb{R},*)$, $u * v = u+v-b$

Pb. 200: Se dau grupurile $(\mathbb{R},+)$ și $(\mathbb{R},*)$, $x*y = x+y+1$.

Funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = ax+b$ este izomorfism de la $(\mathbb{R},+)$ la $(\mathbb{R},*)$ dacă și numai dacă $a,b=?$

Soluție: $M_I$: „clasic"

$f$ izomorfism $\Longleftrightarrow \begin{cases} f \text{ morfism „de grupuri"} \\ f \text{ bijectivă} \end{cases}$

$f$ morfism $\Longrightarrow f(x+y) = f(x) * f(y), \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

$$a(x+y) + b = (ax+b) * (ay+b) \Longrightarrow$$

$$a(x+y) + b = ax + b + ay + b + 1 \Longrightarrow$$

$$\cancel{a(x+y)} + b = \cancel{a(x+y)} + 2b + 1 \Longrightarrow$$

$$b = 2b + 1 \Longrightarrow$$

$$-b = 1 \Longrightarrow$$

$$\boxed{b = -1} \Longrightarrow f(x) = ax - 1, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$f$ bijectivă $\Rightarrow \boxed{a \in \mathbb{R}^*}$, deci răspuns $\boxed{a \in \mathbb{R}^*,\ b = -1}$.

<u>M II</u>: Conform discuției (1) $\Longrightarrow -b = 1$

$a \neq 0$ pt ca să $\exists\, f^{-1}$

$\square$

T.A: Pb 199

② Fie $(H, *) = ((0,\infty), \cdot)$ grupul dat.

Fie $f : (-1, 1) \longrightarrow (0, \infty)$ ; $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$.

$(G, \circ) = ((-1,1), \circ)$ ? structura algebrică „copiată"

T.A: Arătați că $f$ este bijectivă și aflați $f^{-1}$ !

Știm că: • $(H, *)$ este grup comutativ cu $e_H = 1$, $u^{-1} = \dfrac{1}{u}$, $\forall u > 0$

• $f^{-1} : (0,\infty) \longrightarrow (-1, 1)$, $f^{-1}(u) = \dfrac{u-1}{u+1}$

Atunci: $\forall\, x, y \in (-1, 1)$ „Vezi Invers..."

$$x \circ y = f^{-1}\big(f(x) \cdot f(y)\big)$$

$$= f^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{1+y}{1-y}\right) = f^{-1}\left(\frac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy} - 1}{\dfrac{1+x+y+xy}{1-x-y+xy} + 1}$$

$$= \frac{\dfrac{\cancel{1}+x+y+\cancel{xy}\cancel{-1}+x+y\cancel{-xy}}{1-x-y+xy}}{\dfrac{1+\cancel{x}+\cancel{y}+xy+1\cancel{-x}\cancel{-y}+xy}{1-x-y+xy}} = \frac{2x+2y}{2+2xy} = \frac{x+y}{1+xy}$$

Deci $\Big(\underbrace{(-1,1)}_{G},\circ\Big) \overset{f}{\cong} \Big(\underbrace{(0,\infty)}_{H},\cdot\Big)$ bijectivă, $x\circ y = \dfrac{x+y}{1+xy}$, $\forall\, x,y\in(-1,1)$.

Pb (746 → 748) Se dă grupul $(G,\circ)$, $G=(-1,1)$ și $x\circ y = \dfrac{x+y}{1+xy}$

Se cer: (a) elementul neutru $e_G = ?$

(b) $\frac{1}{2}\circ\frac{1}{4}\circ\ldots\circ\frac{1}{10} = ?$

(c) Valorile $a,b=?$ a.î. $f:(G,\circ)\to((0,\infty),\cdot)$,

$f(x) = \dfrac{a+x}{b-x}$ să fie izomorfism de grupuri.

Soluție:

Observație: Este recomandat ca în astfel de probleme să începem cu aflarea izomorfismului!

(c) Din discuția (2) de sus $\Longrightarrow$ $a=1,\ b=1$

[T.A: „Clasic": din $f$ morfism, $f$ bijectivă, calcule $\Longrightarrow a=1, b=1$]

(a) Deci $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ este izomorfism $(G,\circ)\simeq((0,\infty),\cdot)$

$\Longrightarrow$ $f(e_G)=1$ $\quad (f(e_G)=e_H)$

$e_G=f^{-1}(1)=\frac{1-1}{1+1}=0$.

b) Notăm $a = \frac{1}{2} \circ \frac{1}{4} \circ \dots \circ \frac{1}{10} \Rightarrow$

$$f(a) = f\left(\frac{1}{2} \circ \frac{1}{4} \circ \dots \circ \frac{1}{10}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \cdot \dots \cdot \frac{1+\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}} \cdot \frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{6}} \cdot \dots \cdot \frac{\frac{11}{10}}{\frac{9}{10}}$$

$$= \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{1} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \cdot \frac{7}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{5}} \cdot \dots \cdot \frac{11}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{\cancel{9}}$$

$$= 11 \Rightarrow f(a) = 11 \Rightarrow a = f^{-1}(11) = \frac{11-1}{11+1} = \frac{10}{12}$$

$$\Rightarrow q = \frac{10}{12} \Rightarrow \boxed{q = \frac{5}{6}}$$

$\square$

T.A: 782 → 784

[Admitere 2018]

234

Pb. 878 → 881 : Pe $\mathbb{C}$ se dă legea de compoziție

$$z_1 * z_2 = z_1 z_2 - i(z_1 + z_2) - 1 + i, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Se cer: (a) elementul neutru al legii „$*$"?

(b) Mulțimea elementelor simetrizabile (inversabile) ale monoidului $(\mathbb{C}, *)$?

(c) Dacă $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ atunci

$$\underbrace{(\varepsilon + i) * (\varepsilon + i) * \dots * (\varepsilon + i)}_{2022 \text{ de ori}} \text{ este ?}$$

Soluție: Se specifică $(\mathbb{C}, *)$ monoid;

Ar trebui să știm: $(\mathbb{C}, \cdot)$ monoid $(e = 1)$ iar $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ grup.

• Observăm că:

$$z_1 * z_2 = z_1 z_2 - i z_1 - i z_2 - 1 + i$$

$$= z_1(z_2 - i) - i(z_2 - i) + i$$

$$= (z_1 - i)(z_2 - i) + i \Longrightarrow$$

$$\boxed{z_1 * z_2 - i = (z_1 - i)(z_2 - i)} \xrightarrow{\text{sugerează}} \text{să definim}$$

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f(z) = z - i,$$ bijectivă cu inversa (Se verifică T.A.)

$$f^{-1}(z) = z + i$$

$$\boxed{f(z_1 * z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)} \Longrightarrow$$

monoidul $\underbrace{(\mathbb{C}, *)}_{(G, *)} \overset{f}{\cong}$ monoidul $\underbrace{(\mathbb{C}, \cdot)}_{(H, \cdot)}$

$$\Rightarrow \text{(a)} \quad f(e_G) = e_H \Rightarrow f(e_G) = 1 \Rightarrow e_G = f^{-1}(1) \Rightarrow$$

$$\boxed{e_G = 1 + i}$$

(b) Deoarece $f$ este izomorfism de monoizi
$$\left.\begin{array}{l} \\ f(x') = f(x)' \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$f\big(U(G,*)\big) = U(H,\cdot) \text{ şi } f^{-1}\big(U(H,\cdot)\big) = U(G,*) \Longrightarrow$$

$$f^{-1}(\mathbb{C}^*) = U(\mathbb{C},*)$$

$$\left.\begin{array}{l} f^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\}) = \mathbb{C}\setminus\{f^{-1}(0)\} \\ \text{Dar } f^{-1}(0) = i \end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{U(\mathbb{C},*) = \mathbb{C}\setminus\{i\}}$$

(c) Fie $q = \varepsilon + i$; Calculam

$$f(z) = \underbrace{f\big((\varepsilon+i) * \dots * (\varepsilon+i)\big)}_{2022}$$

$$= \underbrace{f(\varepsilon+i) \cdot \dots \cdot f(\varepsilon+i)}_{2022}$$

$$= \underbrace{\varepsilon \cdot \dots \cdot \varepsilon}_{2022} = \varepsilon^{2022}$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3} \implies \varepsilon^3 = 1 \implies$$

$$\varepsilon^{2022} = \left(\varepsilon^3\right)^{674} = 1 \implies$$

$$f(z) = 1 \implies z = f^{-1}(1) = 1+i \implies$$

$$\boxed{z = 1+i}$$

$\blacksquare$